第６講　微分法，積分法②

1　次の問いに答えよ．

(1)　x についての２次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k (x^2-2kx-3k^2+1)dx$ の最小値と最大値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 中心 (0, 1)，半径 1 の円を C，放物線 $y=x^2$ を C_1 とする．また，円 C 上に頂点 A をもつ放物線 $y=-(x-p)^2+q$ を C_2 とする．

(1) C_2 の頂点 A が (0, 0) 以外にあるとき，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わることを示せ．

(2) C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積を S とする．C_2 の頂点 A が円 C 上を動くとき，S の最大値と，そのときの A の座標を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　直線 $y=x$ を l，放物線 $y=x^2+1$ を C とする．

(1)　l 上の任意の点 P から C に 2 本の接線が引けることを示せ．

(2)　(1)の 2 本の接線と C で囲まれる部分の面積を S，接点の x 座標を α，β（$\alpha<\beta$）とする．P が l 上を動くとき，$\dfrac{S}{\beta-\alpha}$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　微分法，積分法②

1 次の問いに答えよ．

(1) x についての２次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

(2) (1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)dx$ の最小値と最大値を求めよ．

(1) $x^2-2kx-3k^2+1=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-(-3k^2+1)=4k^2-1<0 \qquad k^2<\frac{1}{4} \qquad よって \quad \boldsymbol{-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}}$$

(2) $F(k)=\left[\frac{x^3}{3}-kx^2+(-3k^2+1)x\right]_0^k=-\frac{11}{3}k^3+k$

$F'(k)=-11k^2+1$　より，

$F'(k)=0$ のとき　$k=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}$

k	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$F'(k)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(k)$	$-\frac{1}{24}$	↘	$-\frac{2\sqrt{11}}{33}$	↗	$\frac{2\sqrt{11}}{33}$	↘	$\frac{1}{24}$

よって　$F(k)$ は　**最大値** $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{11}}{33}}$，**最小値** $\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{11}}{33}}$　をもつ．

2 中心 $(0,\ 1)$，半径１の円を C，放物線 $y=x^2$ を C_1 とする．また，円 C 上に頂点 A をもつ放物線 $y=-(x-p)^2+q$ を C_2 とする．

(1) C_2 の頂点 A が $(0,\ 0)$ 以外にあるとき，C_1 と C_2 は異なる２点で交わることを示せ．

(2) C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積を S とする．C_2 の頂点 A が円 C 上を動くとき，S の最大値と，そのときの A の座標を求めよ．

(1) $C:x^2+(y-1)^2=1$ 上に C_2 の頂点 $(p,\ q)$ があるので

$p^2+(q-1)^2=1$　$(0<q\leqq 2)$　……①

C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x^2=-(x-p)^2+q$ より，$2x^2-2px+p^2-q=0$　……②

の２解である．この式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-2(p^2-q)=-p^2+2q=-\{1-(q-1)^2\}+2q=q^2>0 \quad (①より)$$

ゆえに，C_1 と C_2 は異なる２点で交わる．

(2) ②の２解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=\frac{p^2-q}{2}$

$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x-p)^2+q-x^2\}dx=\int_\alpha^\beta(-2x^2+2px+q-p^2)dx$$

$$=\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)dx=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(q^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}q^3 \quad (0<q\leqq 2)$$

よって，S は単調増加関数より，$q=2$ のとき S は最大となり，このとき　$p=0$

したがって　**S の最大値 $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$，A$(0,\ 2)$**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 直線 $y=x$ を l，放物線 $y=x^2+1$ を C とする．

(1) l 上の任意の点 P から C に 2 本の接線が引けることを示せ．

(2) (1)の 2 本の接線と C で囲まれる部分の面積を S，接点の x 座標を α，β ($\alpha<\beta$) とする．P が l 上を動くとき，$\dfrac{S}{\beta-\alpha}$ の最小値を求めよ．

(1) $C: y=x^2+1$ より $y'=2x$

$x=t$ における C の接線の方程式は $y=2t(x-t)+t^2+1$ より $y=2tx-t^2+1$

これが l 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p)$ を通るとき $p=2tp-t^2+1$ より $t^2-2pt+p-1=0$ ……①

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(p-1)=p^2-p+1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，任意の p で①は異なる 2 実数解をもつ．

ゆえに，l 上の任意の点 P から C に 2 本の接線が引ける．

(2) ①の 2 解が α，β ($\alpha<\beta$) であることより

$$\alpha=p-\sqrt{p^2-p+1},\quad \beta=p+\sqrt{p^2-p+1}$$

よって $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=p$

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^p\{(x^2+1)-(2\alpha x-\alpha^2+1)\}dx+\int_p^\beta\{(x^2+1)-(2\beta x-\beta^2+1)\}dx\\
&=\int_\alpha^p(x-\alpha)^2dx+\int_p^\beta(x-\beta)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^p+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_p^\beta\\
&=\frac{1}{3}(p-\alpha)^3-\frac{1}{3}(p-\beta)^3\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3\\
&=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

$$\frac{S}{\beta-\alpha}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2=\frac{1}{3}(p^2-p+1)=\frac{1}{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，$\dfrac{S}{\beta-\alpha}$ は $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　放物線 C_1：$y=x^2$ と定点 A$(a,\ b)$（ただし，$a^2<b$）を通る放物線 C_2：$y=-3x^2+2px+q$ の交点をP，Qとする．点P，Qの x 座標をそれぞれ α，β（ただし，$\alpha<\beta$）とする．2つの放物線 C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を a，b，p を用いて表せ．

(2)　S を最小にする p とその最小値を a，b を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ 上に2点 $\mathrm{P}(2p,\ 2p^2)$，$\mathrm{Q}(2q,\ 2q^2)$ がある．ただし，$p<q$ である．点Pにおける接線と点Qにおける接線の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とする．また，放物線 C と2直線PR，QRで囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　α，β を p，q を用いて表せ．

(2)　S を p，q を用いて表せ．

(3)　$S=9$ かつ $\mathrm{PR}\perp\mathrm{QR}$ のとき，α，β の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 6 講　微分法，積分法②　　練習問題　解答

1　放物線 $C_1 : y=x^2$ と定点 $\mathrm{A}(a,\ b)$（ただし，$a^2<b$）を通る放物線 C_2 : $y=-3x^2+2px+q$ の交点を P，Q とする．点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β（ただし，$\alpha<\beta$）とする．2 つの放物線 C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を a，b，p を用いて表せ．

(2)　S を最小にする p とその最小値を a，b を用いて表せ．

解答例

(1)　C_2 が点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通るので，$b=-3a^2+2pa+q$　より，$q=3a^2-2pa+b$　……①

また，α，β は x の 2 次方程式　$x^2=-3x^2+2px+q$　　$4x^2-2px-q=0$　の 2 解より

$$\beta-\alpha=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{4}-\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{4}=\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}\quad\cdots\cdots②$$

よって

$$S=\int_\alpha^\beta(-3x^2+2px+q-x^2)dx$$
$$=-4\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{2}{3}(\beta-\alpha)^3$$

インテグラルの中の関数が因数分解され，さらに公式に至る流れを再確認しよう．

$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}(p^2-8ap+12a^2+4b)^{\frac{3}{2}}}\quad(①，②より)$$

(2)　$p^2-8ap+12a^2+4b=(p-4a)^2-4a^2+4b$

$b>a^2$ より　$-4a^2+4b>0$

(1)を解いている時点でグラフを描いたときに検証済であると思うが，面積がマイナスにならないことを再確認した．

よって，S を最小にする p は $\boldsymbol{p=4a}$ であり，

このときの最小値は　$\dfrac{1}{12}(-4a^2+4b)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{12}\cdot4^{\frac{3}{2}}\cdot(b-a^2)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}$

2　放物線 $C : y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(2p,\ 2p^2)$，$\mathrm{Q}(2q,\ 2q^2)$ がある．ただし，$p<q$ である．点 P における接線と点 Q における接線の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とする．また，放物線 C と 2 直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　α，β を p，q を用いて表せ．　　(2)　S を p，q を用いて表せ．

(3)　$S=9$ かつ $\mathrm{PR}\perp\mathrm{QR}$ のとき，α，β の値を求めよ．

解答例

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$

よって，点 P における C の接線の方程式は　$y=2p(x-2p)+2p^2$　より

$y=2px-2p^2$　……①

点 Q における C の接線の方程式は　$y=2qx-2q^2$　……②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

①，②より　$2px-2p^2=2qx-2q^2$　から　$(p-q)x=(p-q)(p+q)$

$p<q$ より　$x=p+q$　　このとき，①より　$y=2pq$

よって　$\boldsymbol{\alpha=p+q,\ \beta=2pq}$

(2)　求める面積 S は

$$S=\int_{2p}^{\alpha}\left(\frac{x^2}{2}-2px+2p^2\right)dx+\int_{\alpha}^{2q}\left(\frac{x^2}{2}-2qx+2q^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2p}^{\alpha}(x-2p)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{2q}(x-2q)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-2p)^3\right]_{2p}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-2q)^3\right]_{\alpha}^{2q}$$

「放物線とその接線」に関する問題．接点による因数分解からインテグラルの計算までを再確認！

$$=\frac{1}{6}(\alpha-2p)^3-\frac{1}{6}(\alpha-2q)^3$$

$$=\frac{1}{6}(p+q-2p)^3-\frac{1}{6}(p+q-2q)^3\quad(\alpha=p+q\text{より})$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{6}(q-p)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(q-p)^3}$$

(3)　$S=9$ のとき

$\frac{1}{3}(q-p)^3=9$　より　$(q-p)^3=27$　　よって　$q-p=3$　……③

また，PR ⊥ QR より

$2p\cdot2q=-1$　　よって　$pq=-\frac{1}{4}$　……④

③，④より

$$(p+q)^2=(p-q)^2+4pq=9+4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=8$$

よって　$p+q=\pm2\sqrt{2}$

以上より

$$\boldsymbol{\alpha=p+q=\pm2\sqrt{2},\ \beta=2pq=-\frac{1}{2}}$$

※繰り返すようであるが，1 2のインテグラルの計算はともに「2グラフの交点の x 座標による式の変形」をベースにしている．

2グラフの式を連立し，y を消去することにより x についての1つの式となり，グラフの交点の x 座標の値が x についての方程式の解となる．

$ax^2+bx+c=0$ が $x=\alpha,\ \beta$ を2解にもつ　$\Longleftrightarrow$　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+bx+c=0$ が $x=\alpha$ を重解にもつ　$\Longleftrightarrow$　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$

最高次の係数には特に注意を払うこと．

また，この「解による変形」を強く意識することにより，この分野だけにとどまらず式を同値変形したり，別に式を作成し係数比較することなども可能となる．

解と係数の関係，方程式への解の代入とともに確実に覚えておこう．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。